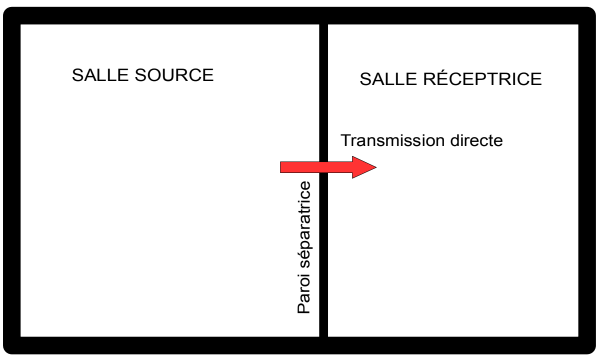
Loi des masses

Frédéric Poirrier
Juin 2014

Lorsque l'on s'intéresse aux questions relatives à la transmission des bruits aériens à travers les parois, étudier la *loi des masses* est une étape préliminaire incontournable. Mais lorsqu'il s'agit de dimensionner l'isolement d'un bâtiment , cette *loi des masses* dans sa version élémentaire est rarement appliquée telle quelle, car trop simplificatrice vis-à-vis des phénomènes réels intervenants. Pour en déterminer les limites, il est absolument nécessaire d'en connaître l'origine. C'est pourquoi, on propose dans ce petit exposé, une démonstration la *loi des masses* au moins pour sa version la plus basique, celle qui ne prend en compte que l'effet d'inertie. Cette démonstration, comme souvent en sciences, repose sur le célèbre principe fondamental de la dynamique de Newton appliqué à un élément de volume.

Au préalable, il nous faut définir deux grandeurs essentielles : la première étant le coefficient de transmission en énergie τ de l'élément de paroi et la seconde son indice d'affaiblissement, noté R. Pour illustrer cela, considérons la situation décrite par le schéma ci-dessous où deux pièces sont séparées par une paroi transparente aux bruits.



Dans notre situation, on n'étudie que la transmission du bruit direct, c'est-à-dire que nous ne considérons que l'énergie qui traverse la paroi séparatrice. Les autres voies de transmission telles que celles qui se propagent par l'intermédiaire du sol, du plafond ou des murs latéraux sont supposées nulles.

Le coefficient de transmission en énergie est, par définition, donné par :

$$\tau = \frac{E_t}{E_i}$$

Où E_t est l'énergie totale transmise à travers l'élément de séparation et E_i est l'énergie totale incidente.

L'indice d'affaiblissement acoustique R de la paroi, exprimé en décibel, est donné par :

$$R = -10 \log \tau$$

Le signe moins provient du fait que l'on souhaite un indice d'affaiblissement R positif, τ étant toujours inférieur à 1.

τ	R en dB
0,1	10
0,01	20
0,001	30
0,0001	40

Par exemple, un indice d'affaiblissement de 20 dB signifie que seule 1% de l'énergie incidente est transmise par la paroi séparatrice.

En laboratoire d'essais, l'indice d'affaiblissement d'un élément de paroi se calcule d'après la relation suivante :

$$R = L_1 - L_2 + 10 \log \frac{S}{A}$$

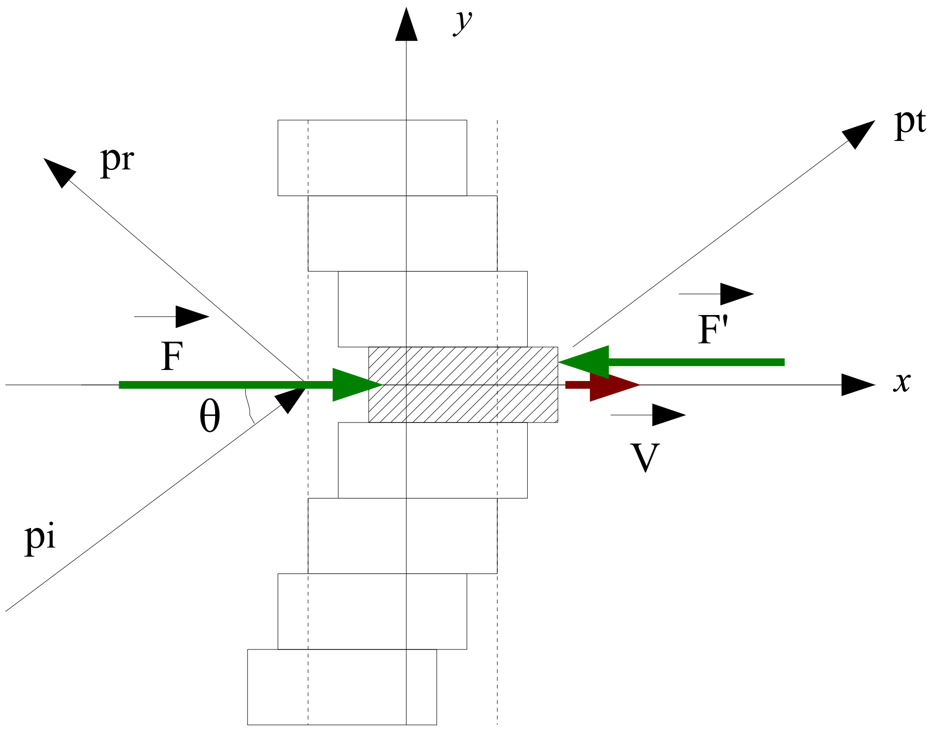
Où :
L_1 est le niveau de pression acoustique existant dans la salle source, en dB.
L_2 est le niveau de pression acoustique existant dans la salle réceptrice, en dB.
A est l'aire d'absorption équivalente de Sabine dans la salle réceptrice, en m^2.
S est l'aire de la surface de l'élément de séparation, en m^2.

Cette dernière relation est issue d'un bilan énergétique réalisé dans la salle réceptrice. *R* caractérise ici l'affaiblissement de la paroi seule car les transmission latérales (sol, plafond et murs) en laboratoire sont supposées maîtrisées par construction.
Si les mesurages ont lieu en situation réelle (entre deux logements, par exemple), l'indice d'affaiblissement est dit apparent car il caractérise la transmission de l'ensemble des parois et non plus l'élément de séparation seul. Dans ce cas, l'indice d'affaiblissement s'écrit R' pour le distinguer de celui mesuré en laboratoire.

Imaginons la situation schématisée sur le croquis ci-dessous. On suppose que le mur est:

- homogène
- indéformable
- d'épaisseur constante et très petite devant la longueur d'onde
- sans élasticité
- et l'espace infini à droite du mur (pas de retour de l'onde transmise)

On partitionne ce mur en petits éléments de volume qui se déplacent les uns par rapport aux autres sans frottements suivant l'axe des abscisses, sous l'action d'une force de pression $\vec{F}$.



Paroi

Attention, les pressions p_i, p_r et p_t respectivement pressions incidente, réfléchie et transmise sont des grandeurs scalaires. Les flèches figurant sur le schéma, n'indiquent que les directions de propagation des ondes de pression.

L'élément solide de volume, sous l'action à la force de pression $\vec{F}$ et sa réaction $\vec{F'}$, est mis en mouvement avec une vitesse $\vec{V}$.

La pression à gauche de la paroi, notée p, est la somme des pressions incidente et réfléchie:

$$p = p_i + p_r = A\,e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)} + Be^{j(\omega t + k_x x - k_y y)}$$

De même, à droite du mur, la pression transmise, notée p', s'écrit :

$$p' = C\,e^{j(\omega t - k_x x - k_y y)}$$

où :
ω est la pulsation de l'onde
k_x *et* k_y sont les composantes suivant x et y du vecteur d'onde $\vec{k}$
A, B et C sont les amplitudes

L'ordonnée y n'intervenant pas directement dans la démonstration, on omet volontairement cette variable, ce qui revient à traiter le problème à une seule dimension suivant l'abscisse x.

On peut écrire alors :

$$p = A\,e^{j(\omega t - k_x x)} + Be^{j(\omega t + k_x x)}$$

$$p' = C\,e^{j(\omega t - k_x x)}$$

Les expressions des vitesses particulaires, c'est-à-dire des vitesses de vibration (compression-détente) des particules d'air dues au passage des ondes de pression, se déduisent de la relation d'Euler qui s'écrit pour une dimension :

$$\rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

ρ_o étant la masse volumique de l'air.

L'origine de la relation d'Euler est hors de propos ici. Néanmoins, en première approche, on reconnaît une forme de l'équation de Newton appliquée à un élément de fluide, le premier membre étant le produit d'une masse volumique par une accélération et le second ayant les dimensions d'une force.

En appliquant directement la relation d'Euler, c'est-à-dire en dérivant p par rapport à x puis en intégrant par rapport à t, on obtient les expressions des vitesses particulaires v_x et v'_x respectivement à gauche et à droite du mur :

$$v_x = \frac{A k_x}{\rho_0 \omega} e^{j(\omega t - k_x x)} - \frac{B k_x}{\rho_0 \omega} e^{j(\omega t + k_x x)}$$

$$v'_x = \frac{C k_x}{\rho_0 \omega} e^{j(\omega t - k_x x)}$$

En exprimant ω en fonction du nombre d'onde k et de la célérité du son c :

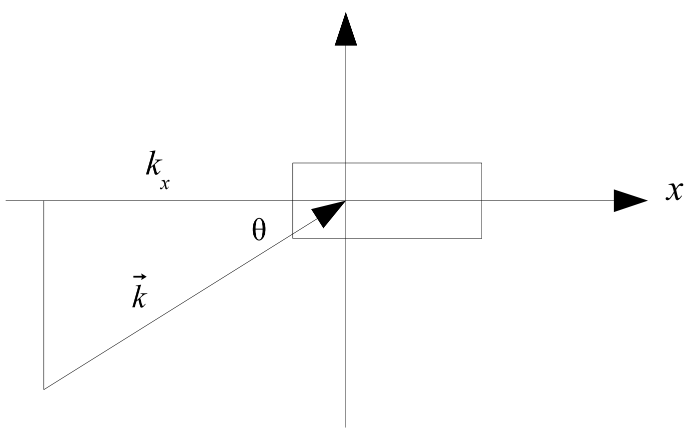
$$\omega = kc$$

Il vient que :

$$v_x = \frac{A}{\rho_0 c} \frac{k_x}{k} e^{j(\omega t - k_x x)} - \frac{B}{\rho_0 c} \frac{k_x}{k} e^{j(\omega t + k_x x)}$$

$$v'_x = \frac{C}{\rho_0 c} \frac{k_x}{k} e^{j(\omega t - k_x x)}$$

Or k_x n'est autre que la projection du vecteur $\vec{k}$ suivant x :



Soit $k_x = k \cos\theta$

En substituant k_x par cette dernière expression, il vient au final :

$$v_x = \frac{A}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j(\omega t - k_x x)} - \frac{B}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j(\omega t + k_x x)}$$

$$v'_x = \frac{C}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j(\omega t - k_x x)}$$

On applique maintenant la condition de continuité des vitesses particulaires à gauche et à droite de la paroi ainsi qu'à l'élément solide, en x=0 :

$$v_x(x=0) = v'_x(x=0) = V$$

La vitesse de l'élément solide pouvant s'écrire, $V = Ue^{j\omega t}$ on a :

$$\frac{A}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j\omega t} - \frac{B}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j\omega t} = \frac{C}{\rho_0 c} \cos\theta \, e^{j\omega t} = Ue^{j\omega t} \quad (1)$$

Par ailleurs, nous pouvons appliquer la relation fondamentale de la dynamique suivant x au solide élémentaire :

$$m \frac{dV}{dt} = F - F'$$

En divisant cette équation par l'aire latérale de l'élément de paroi, il vient encore:

$$\rho_s \frac{dV}{dt} = p - p'$$

Où ρ_s représente la masse surfacique de la paroi exprimée en kg/m^2

Or l'accélération de l'élément de paroi peut s'écrire également en fonction de la vitesse V :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d(Ue^{j\omega t})}{dt} = j\omega V$$

Ainsi, on relie pression et vitesse par :

$$j\omega\rho_s V = p - p'$$

Soit encore en $x = 0$

$$j\omega\rho_s U\, e^{j\omega t} = (A + B - C)\, e^{j\omega t}$$

d'où

$$j\omega\rho_s U = A + B - C \quad (2)$$

En résumé, nous avons un système d'équations constitué une double égalité (1) qui exprime la continuité des vitesses et l'équation de Newton qui relie vitesse et pressions (2) :

- $\frac{A}{\rho_0 c}\cos\theta - \frac{B}{\rho_0 c}\cos\theta = U \quad (3)$
- $\frac{C}{\rho_0 c}\cos\theta = U \quad (4)$
- $j\omega\rho_s U = A + B - C \quad (5)$

Nous cherchons à exprimer le coefficient de transmission en énergie τ de l'élément de paroi, c'est-à-dire le rapport du module au carré des amplitudes de l'onde transmise et de l'onde incidente, qui s'écrit simplement :

$$\tau = \left|\frac{C}{A}\right|^2$$

En égalisant les équations (3) et (4), il vient aisément :

$$C = A - B \quad (6)$$

Puis en combinant les équations (4) et (5)

$$C\left(\frac{j\omega\rho_s}{\rho_0 c}\cos\theta + 1\right) = A + B \quad (7)$$

Enfin, en additionnant (6) avec (7), on élimine B :

$$C\left(\frac{j\omega\rho_s}{\rho_0 c}\cos\theta+2\right)=2A \quad (8)$$

En réarrangeant (8) on obtient :

$$\frac{C}{A}=\frac{1}{1+\frac{j\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\cos\theta}$$

d'où

$$\tau=\left|\frac{C}{A}\right|^2=\frac{1}{1+\left(\frac{\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\cos\theta\right)^2}$$

Comme $\omega\rho_s$ est généralement grand, $1\ll\left(\frac{\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\cos\theta\right)^2$

Cela qui conduit à la forme simplifiée du coefficient de transmission en énergie :

$$\tau\approx\left(\frac{\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\cos\theta\right)^{-2}$$

Ainsi, l'indice d'affaiblissement R pour une onde arrivant sous un angle d'incidence θ vaut

$$R=-10\log\tau=20\log\left(\frac{\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\cos\theta\right)$$

Deux choses apparaissent :

- Si l'on double la pulsation ω (ou la fréquence), l'indice d'affaiblissement est augmenté de + 6 dB (résultat de 20 log 2).
- De même, en doublant la masse surfacique ρ_s de la paroi, l'indice d'affaiblissement est également augmenté de + 6 dB.

Néanmoisn, on estime que les champs acoustiques incident et transmis sont diffus. Cela signifie, pour le champ incident, que les ondes arrivent sur le mur sous incidence aléatoire sans privilégier de directions particulières. Cette condition sera réalisée, au moins partiellement, si la source de bruits est suffisamment éloignée de la paroi.

Pour obtenir l'indice d'affaiblissement en champ diffus, noté R_d, il faudrait effectuer une moyenne spatiale de l'énergie incidente et de l'énergie transmise.

Des résultats expérimentaux, ont cependant montré que la loi des masses en champ diffus s'écrivait :

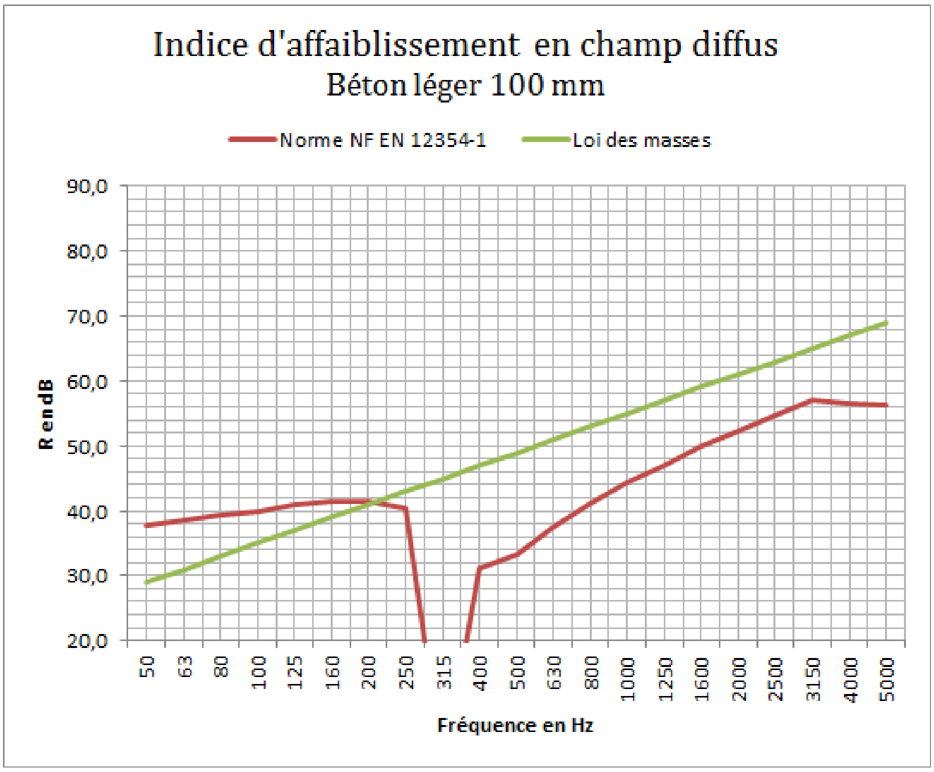
$$R_d = 20\,log\left(\frac{\omega\rho_s}{2\rho_0 c}\right) - 5$$

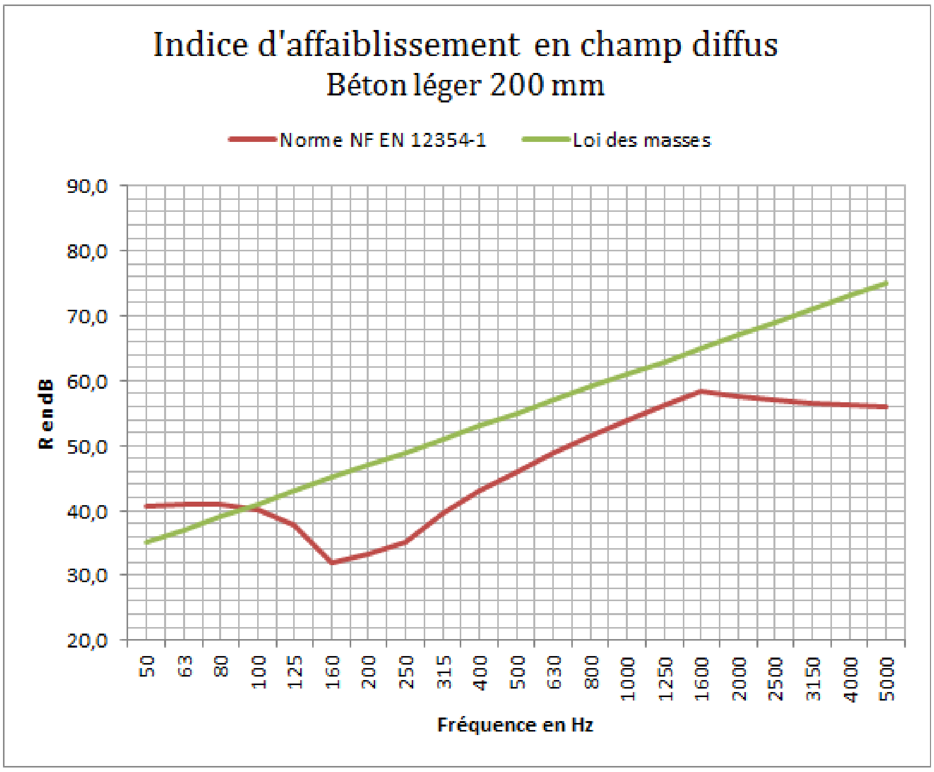
L'indice d'affaiblissement en champ diffus R_d est plus faible de 5 dB que l'indice d'affaiblissement sous incidence normale $R(\theta = 0)$.

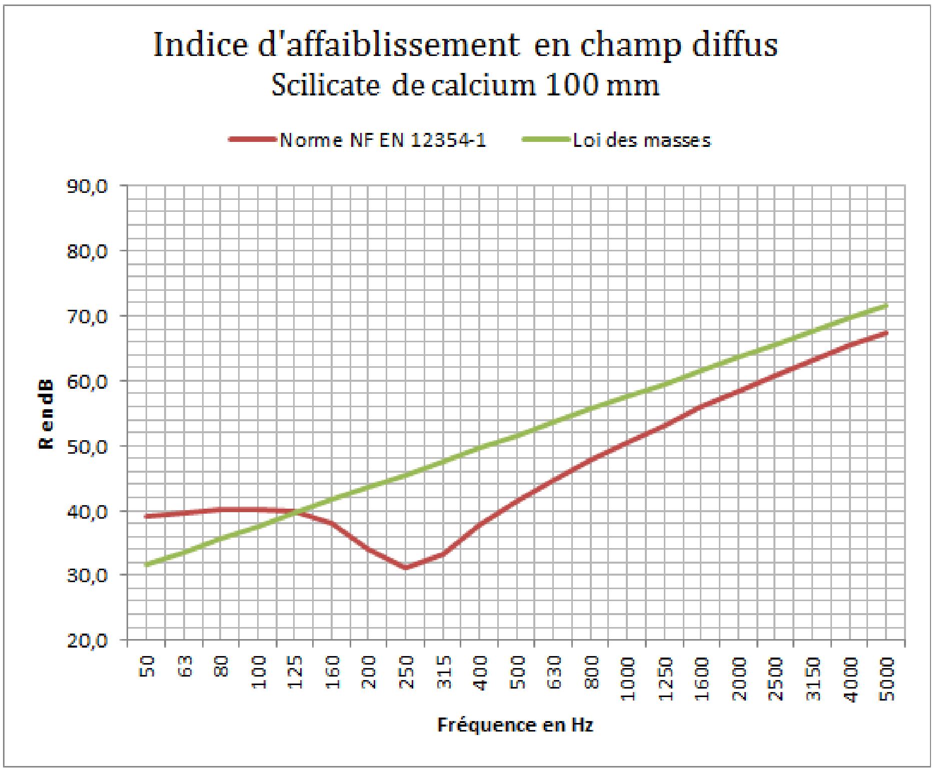
Jacques Jouhaneau dans *Acoustique des salles et sonorisation* propose une loi des masses qui assimile la paroi à un piston plan. Dans ce cas, l'indice d'affaiblissement R est également fonction de la raideur mécanique k_m et de la résistance mécanique r_m de la paroi, qui montre que celle-ci a un déficit d'affaiblissement à une fréquence dite de « résonance ».
Cependant, toutes ses approches sont relativement limitées, notamment parce qu'elles ne prennent pas en considération d'autres phénomènes comme la présence d'ondes de flexion qui va changer le comportement vibratoire de la paroi.

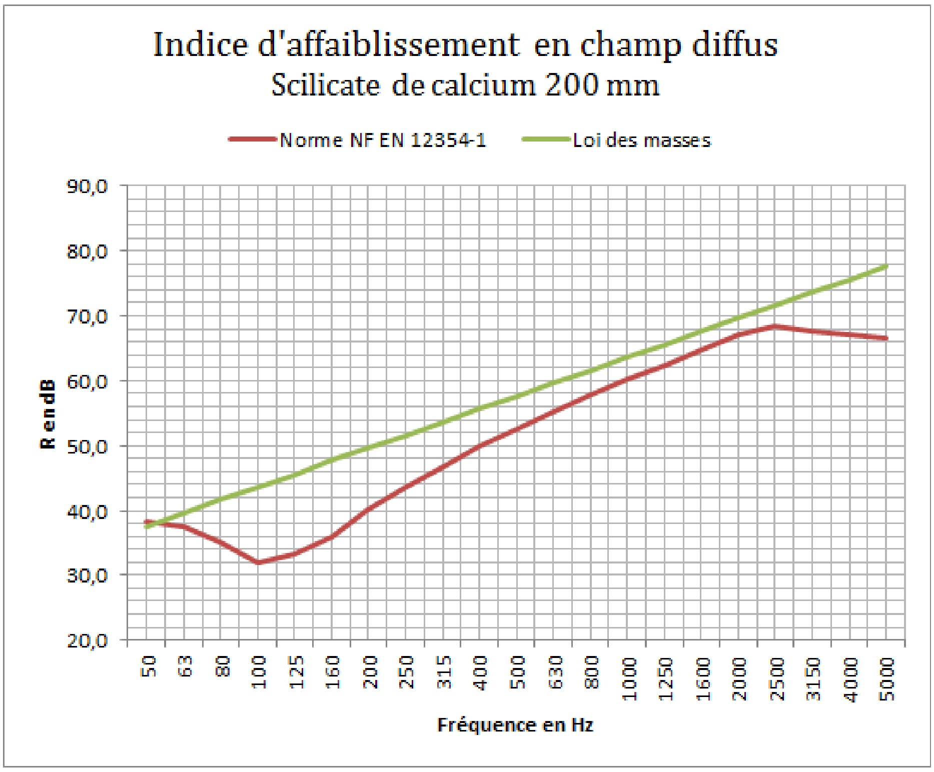
Pour conclure, nous allons comparer la valeur de l'affaiblissement donnée par la loi des masses avec celle calculée d'après la norme NF EN 12354-1 qui propose une méthode fiable et complète pour les parois monolithes. Les diagrammes ci-dessous indiquent l'indice d'affaiblissement par bandes de tiers d'octave d'un mur de dimensions 5,00 m x 2,50 m, en 100 mm puis de 200 mm d'épaisseur, constitués de :

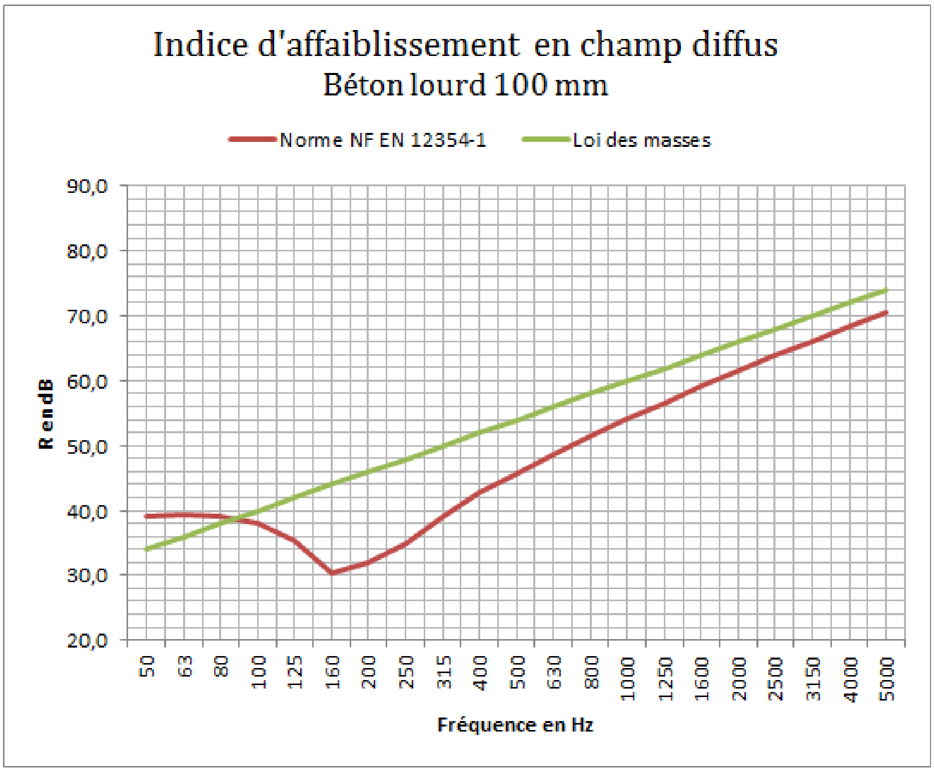
- Béton léger (1300 kg/m^3)
- Scilicate de calcium (1750 kg/m^3)
- Béton lourd (2300 kg/m^3)

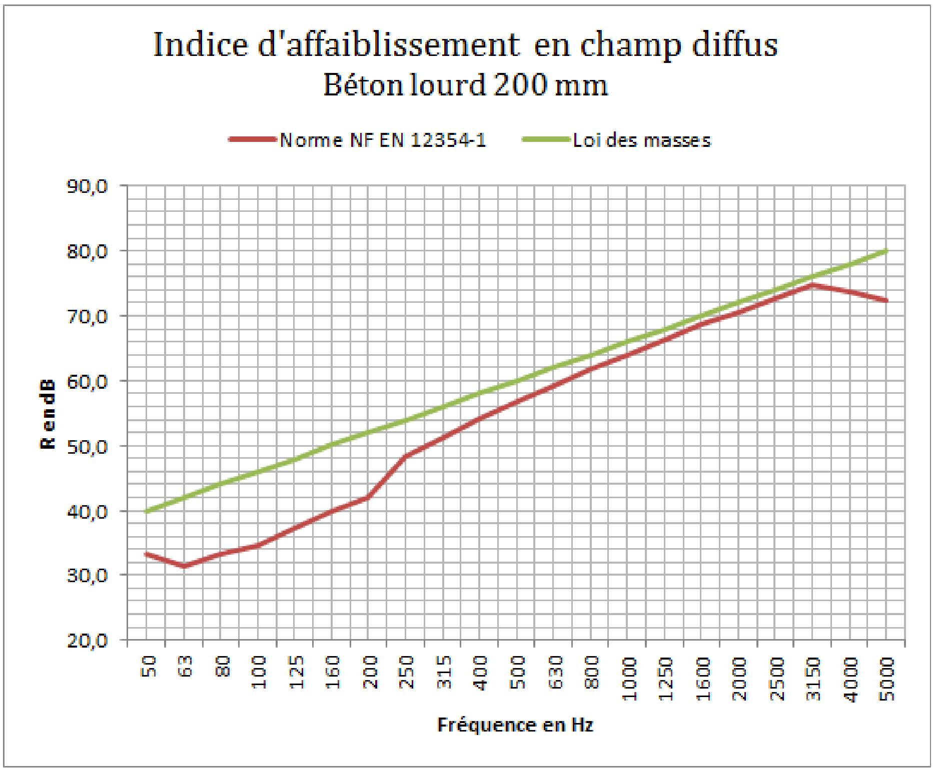



Indice d'affaiblissement en champ diffus
Béton léger 200 mm
Norme NF EN 12354-1
Loi des masses
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
R en dB
50
63
80
100
125
160
200
250
315
400
500
630
800
1000
1250
1600
2000
2500
3150
4000
5000
Fréquence en Hz


Indice d'affaiblissement en champ diffus
Scilicate de calcium 100 mm
Norme NF EN 12354-1
Loi des masses
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
R en dB
50
63
80
100
125
160
200
250
315
400
500
630
800
1000
1250
1600
2000
2500
3150
4000
5000
Fréquence en Hz


Indice d'affaiblissement en champ diffus
Scilicate de calcium 200 mm
Norme NF EN 12354-1
Loi des masses
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
R en dB
50
63
80
100
125
160
200
250
315
400
500
630
800
1000
1250
1600
2000
2500
3150
4000
5000
Fréquence en Hz


Indice d'affaiblissement en champ diffus
Béton lourd 100 mm
Norme NF EN 12354-1
Loi des masses
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
R en dB
50
63
80
100
125
160
200
250
315
400
500
630
800
1000
1250
1600
2000
2500
3150
4000
5000
Fréquence en Hz



On remarque que la loi des masses a tendance à surévaluer l'affaiblissement. Elle donne cependant, une assez bonne estimation, à 2 dB près, en haute fréquence lorsque que la paroi est lourde et suffisamment épaisse, c'est-à-dire lorsque que les effets d'inertie sont prépondérants.

Bibliographies :

Cours du Cnam, ACC104 « techniques et contrôle du bruit » d'Alexandre Garcia
Acoustique des salles et sonorisation de Jacques Jouhaneau (Collection CNAM édition TEC & DOC)
Norme EN 12354-1 Acoustique du bâtiment ...isolement acoustique aux bruits aériens entre des locaux.